MEDIDA GENERADA POR UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Introducción

El método más utilizado para construir medidas consiste en aplicar el **teorema de extensión de Carathéodory**, el cual está basado en las ideas que desarrolló Lebesgue para definir lo que se conoce como la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$; ésta no es otra cosa que una extensión del concepto de longitud de un intervalo. Lebesgue se propuso asignarle, de una manera única, una longitud a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ mediante un proceso de extensión, partiendo de que se sabe cómo asignarle una longitud a un intervalo.

El problema que surgió en ese intento es que, con el método de Lebesgue, esa extensión no se puede llevar hasta abarcar todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, por lo menos si entre los axiomas de la teoría de conjuntos se incluye el axioma de elección.

Es por eso que se hace necesario trabajar con lo que se conoce como álgebras y σ-álgebras de subconjuntos de un conjunto dado.

Generalizando el método de Lebesgue, Carathéodory mostró que teniendo asignada una medida a cada elemento de un álgebra de subconjuntos de un conjunto dado $\mathbb{F}$, bajo determinadas condiciones esa medida se puede extender, de manera única, de tal manera que se asigne una medida a cada elemento de una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$ más grande que el álgebra inicial y que esa familia forme lo que se conoce como una σ-álgebra.

Definición 1 (**álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es un álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\mathbb{F} \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo complementos.*
3. $\mathcal{A}$ *es cerrada bajo uniones finitas.*

Definición 2 (**σ-álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\Im$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es una σ-álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\mathbb{F} \in \Im$.
2. $\Im$ *es cerrada bajo complementos.*
3. $\Im$ *es cerrada bajo uniones infinitas numerables.*

Obsérvese que toda σ-álgebra es también un álgebra. En efecto, como $\mathbb{F} \in \Im$ y $\Im$ es cerrada bajo complementos, el conjunto vacío $\emptyset$ pertenece a $\Im$. Así que, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son de elementos de $\Im$, entonces, definiendo $A_j = \emptyset$ para cualquier $j > n$, se tiene:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Im$$

Aunque está dicho en las definiciones, observemos que una σ-álgebra es un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

Definición 3. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Llamaremos* ***σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$*** *a la más pequeña familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que forme una σ-álgebra y que contenga a todos los elementos de $\mathcal{G}$.*

Vamos a trabajar con el conjunto de los números reales extendido, agregándole a $\mathbb{R}$ dos elementos, ∞ y $-\infty$, con las siguientes convenciones:

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$-\infty < c < \infty$

$c - \infty = -\infty$

$c + \infty = \infty$

$c\,(\infty) = \infty$ si $c > 0$

$c\,(\infty) = -\infty$ si $c < 0$

$(0)\,(\infty) = (0)\,(-\infty) = 0$

$\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$

$(\infty)\,(\infty) = \infty + \infty = \infty$

$\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ no están definidos.

Al conjunto de los números reales extendido lo denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 4 (**Función finitamente aditiva sobre un álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es finitamente aditiva si dada cualquier familia finita, $A_1, \ldots, A_n$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Obsérvese que, si $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, para probar que una función $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es finitamente aditiva, basta con demostrar que si A y B son dos conjuntos ajenos del álgebra, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Teniendo esta propiedad, la aditividad finita se prueba con un razonamiento de inducción.

Definición 5 (**Función $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva sobre un álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definición 6 (**Función $\boldsymbol{\sigma}$-aditiva sobre una σ-álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\Im$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definición 7 (**Función $\boldsymbol{\sigma}$-subaditiva sobre un álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-subaditiva, o que satisface la propiedad de la subaditividad numerable, si dada cualquier colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición 8 (**Medida sobre una σ-álgebra**). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una medida si μ es σ-aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$.*

Demostremos algunas propiedades simples que tiene cualquier función no negativa finitamente aditiva definida sobre un álgebra.

Proposición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa finitamente aditiva, entonces:*

1. *Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.*

Demostración

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset B$, entonces $B = A \cup (B - A)$, así que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Por lo tanto, $\mu(A) \leq \mu(B)$, ya que μ es no negativa.

Sean ahora $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ y definamos $A_0 = \emptyset$, entonces:

$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right)\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$

■

Corolario 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa finitamente aditiva, entonces:*

Si $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ y $\mu(A) < \infty$, entonces:

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

Para cualquier pareja $A, B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \infty$ o $\mu(B) < \infty$, se tiene:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Como lo mencionamos antes, **para construir una medida utilizando el método de Carathéodory se parte de una función μ_0, no negativa y finitamente aditiva definida sobre un álgebra; después se extiende esa función a una medida definida sobre una σ-álgebra. La propiedad que debe tener μ_0 para poder realizar esa extensión es la σ-subaditividad, la cual, como se muestra en el siguiente resultado, es equivalente a la σ-aditividad**.

Teorema 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función no negativa y finitamente aditiva, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *μ es σ-subaditiva.*
2. *μ es σ-aditiva.*

Demostración

$i \Longrightarrow ii$

Supongamos que μ es σ-subaditiva y sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas y tales que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Se tiene:

$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \geq \mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_j)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Por lo tanto, μ es σ-aditiva.

$ii \implies i$

Supongamos μ es σ-aditiva y sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Sea $B_n = A_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, así que:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Por lo tanto, μ es σ-subaditiva.

$\blacksquare$

Vamos a ilustrar el teorema de extensión de Carathéodory construyendo una medida a partir de una función $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ no decreciente y continua por la derecha tal que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Diremos que una función con estas características es una **función de distribución**.

Definición de la medida sobre un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Dada una función de distribución F, definamos $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.

La idea consiste en que, mediante la función F, podemos asignarle directamente una medida, la cual denotaremos por μ_0, a un intervalo de la forma $(a, b]$, donde $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in (-\infty, \infty)$ y $a < b$, mediante la relación:

$$\mu_0((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Es decir, en lugar de asignarle al intervalo $(a, b]$ su longitud, le asignamos $F(b) - F(a)$ como el valor de su medida.

Agreguemos la definición de la medida del intervalo $(-\infty, \infty)$ y la medida del conjunto vacío:

$$\mu_0((-\infty, \infty)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1$$

$$\mu_0(\emptyset) = 0$$

Denotemos por $\mathcal{I}$ a la familia formada por el conjunto vacío, el intervalo $(-\infty, \infty)$ y todos los intervalos e la forma $(a, b]$, donde $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in (-\infty, \infty)$ y $a < b$.

Con las definiciones anteriores tenemos definida la medida de cualquier elemento de $\mathcal{I}$.

Obsérseve que la familia $\mathcal{I}$ no forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, pero la familia $\mathcal{A}$ formada por los conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $I_1, \ldots, I_n$ son elementos de $\mathcal{I}$, ajenos por parejas, sí forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Para cada $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j \in \mathcal{A}$, definamos:

$$\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j)$$

Ahora vamos a utilizar el método de Carathéodory para extender μ_0 a una familia más grande de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Paso 1. Demostremos que la función $\mu_0 : \mathcal{A} \to R$ está bien definida y que es no negativa y finitamente aditiva.

Evidentemente μ_0 es no negativa.

Para mostrar que está bien definida hay que demostrar que si $I_1, \ldots, I_k$ y $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ son dos colecciones finitas de elementos de $\mathcal{I}$ tales que $I_1, \ldots, I_k$ son ajenos por parejas, $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ son ajenos por parejas y $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_0\left(I_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right)$$

Para esto demostremos el siguiente lema:

Lema 1. *Sea $I \in \mathcal{I}$ y $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ una colección finita de elementos no vacíos de $\mathcal{I}$, ajenos por parejas, tal que $I = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, entonces:*

$$\mu_0\left(I\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right)$$

Demostración

Sean a y b los extremos del intervalo I y, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sean $a^{(j)}$ y $b^{(j)}$ los extremos del intervalo $I^{(j)}$.

Como $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ son ajenos por parejas y su unión es I, podemos ordenar, del menor al mayor, los puntos $a, b, a^{(1)}, b^{(1)}, a^{(2)}, b^{(3)}, \ldots, a^{(m)}, b^{(m)}$ para obtener una colección de intervalos ajenos por parejas, $J^{(1)}, \ldots, J^{(m)}$, con extremos $x^{(1)}, y^{(1)}; x^{(2)}, y^{(2)}; \ldots; x^{(m)}, y^{(m)}$, respectivamente, de tal forma que:

$$a = x^{(1)} < y^{(1)} = x^{(2)} < y^{(2)} = x^{(3)} < \cdots = x^{(m)} < y^{(m)} = b$$

Así que:

$\sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(J^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \left[F\left(y^{(j)}\right) - F\left(x^{(j)}\right)\right]$

$= F\left(b\right) - F\left(a\right) = \mu_0\left(I\right)$

■

Sean ahora $I_1, \ldots, I_k$ y $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ dos colecciones finitas de elementos de $\mathcal{I}$ tales que $I_1, \ldots, I_k$ son ajenos por parejas, $I^{(1)}, \ldots, I^{(m)}$ son ajenos por parejas y $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$, definamos $I_i^{(j)} = I_i \cap I^{(j)}$. Entonces, como $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, se tiene $I_i = \bigcup_{j=1}^{m} I_i^{(j)}$ y $I^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{k} I_i^{(j)}$, así que:

$$\mu_0\left(I_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I_i^{(j)}\right)$$

$$\mu_0\left(I^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_0\left(I_i^{(j)}\right)$$

Por lo tanto:

$\sum_{i=1}^{k} \mu_0\left(I_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I_i^{(j)}\right)$

$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \mu_0\left(I_i^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right)$

Así que μ_0 está bien definida.

Finalmente, es evidente que μ_0 es finitamente aditiva.

Paso 2. Demostremos que μ_0 es $\sigma-$subaditiva.

Para esto, inmediatamente después del siguiente lema, vamos a probar el teorema que establece el resultado central que permite realizar el proceso de extensión de μ_0.

Lema 2. *Sea $I \in \mathcal{I}$ y $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(m)}$ una colección finita de intervalos en $\mathcal{I}$ tales que $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, entonces:*

$$\mu_0\left(I\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right)$$

Demostración

Sean a y b los extremos del intervalo I y, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sean $a^{(j)}$ y $b^{(j)}$ los extremos del intervalo $I^{(j)}$.

Los puntos $a, b, a^{(1)}, b^{(1)}, \ldots, a^{(m)}, b^{(m)}$ constituyen una partición de un intervalo de extremos c y d que contiene al intervalo I.

Esta partición parte cada intervalo $I^{(j)}$, con $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, en subintervalos ajenos por parejas, $I_1^{(j)}, \ldots, I_{n_j}^{(j)}$. Así que:

$$\mu_0\left(I^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{n_j} \mu_0\left(I_k^{(j)}\right)$$

La partición definida antes también parte el intervalo I en subintervalos ajenos por parejas, $I_1, \ldots, I_n$. Así que:

$$\mu_0 (I) = \sum_{k=1}^{n} \mu_0 (I_k)$$

Por otra parte, como $I \subset \bigcup_{j=1}^{m} I^{(j)}$, cada intervalo I_k, con $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, coincide con un intervalo $I_{k'}^{(j)}$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y alguna $k' \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$, por lo tanto:

$$\mu_0 (I) = \sum_{k=1}^{n} \mu_0 (I_k) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} \mu_0 \left(I_k^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0 \left(I^{(j)}\right)$$

■

Teorema 2. *Sea* $I \in \mathcal{I}$ *y* $I_1, I_2, \ldots$ *una colección infinita de intervalos en* $\mathcal{I}$ *tales que* $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. *Entonces:*

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{\infty} [F(b_k) - F(a_k)]$$

donde a y b son los extremos del intervalo I y, para cada $k \in \mathbb{N}$, a_k y b_k son los extremos del intervalo I_k.

Demostración

Si $e, f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y $e < f$, definamos $(e, f|$ de la siguiente manera:

$$(e, f| = \begin{cases} (e, f] & \text{si } f \in \mathbb{R} \\ (e, f) & \text{si } f = \infty \end{cases}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, arbitrarios.

Como F es continua por la derecha, para cada cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta_k > 0$ tal que:

$$F(d_k) - F(b_k) < \tfrac{\varepsilon}{2^k},$$

donde:

$$d_k = \begin{cases} b_k + \delta_k & \text{si } b_k \in \mathbb{R} \\ b_k & \text{si } b_k = \infty \end{cases}$$

Definamos:

$$c_\delta = \begin{cases} a + \delta & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ -\frac{1}{\delta} & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

$$d_\delta = \begin{cases} b & \text{si } b \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\delta} & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

Entonces:

$$\text{lím}_{\delta\to 0}\left[F\left(d_\delta\right)-F\left(c_\delta\right)\right]=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

Además:

$$\left(c_\delta,d_\delta\right|\subset\left[c_\delta,d_\delta\right]\subset I\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(a_k,d_k\right)$$

Así que, por el teorema de Heine-Borel, existe una colección finita, $(a_{k_1},d_{k_1}),\ldots,(a_{k_m},d_{k_m})$, tal que:

$$\left[c_\delta,d_\delta\right]\subset\bigcup_{j=1}^{m}\left(a_{k_j},d_{k_j}\right)$$

Por lo tanto:

$$\left(c_\delta,d_\delta\right|\subset\left[c_\delta,d_\delta\right]\subset\bigcup_{j=1}^{m}\left(a_{k_j},d_{k_j}\right)\subset\bigcup_{j=1}^{m}\left(a_{k_j},d_{k_j}\right|$$

Así que:

$$F\left(d_\delta\right)-F\left(c_\delta\right)\leq\sum_{j=1}^{m}\left[F\left(d_{k_j}\right)-F\left(a_{k_j}\right)\right]\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[F\left(d_k\right)-F\left(a_k\right)\right]$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[F\left(b_k\right)-F\left(a_k\right)\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[F\left(b_k\right)-F\left(a_k\right)\right]+\varepsilon$$

Y, como $\varepsilon>0$ es arbitraria:

$$F\left(d_\delta\right)-F\left(c_\delta\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[F\left(b_k\right)-F\left(a_k\right)\right]$$

Finalmente, tomando límites cuando $\delta\to 0$, se obtiene:

$$F\left(b\right)-F\left(a\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left[F\left(b_k\right)-F\left(a_k\right)\right]$$

■

Teorema 3. *μ_0 es σ-aditiva*

Demostración

Sea $A_1,A_2,\ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas, no vacíos y tales que $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$.

Como para cada $i\in\mathbb{N}$, $A_i\in\mathcal{A}$, A_i es una unión finita de intervalos en $\mathcal{I}$ ajenos por parejas. Además, como $A\in\mathcal{A}$, A también es una unión finita de intervalos en $\mathcal{I}$ ajenos por parejas.

Sean $A=\bigcup_{j=1}^{m}I^{(j)}$ y, para cada $i\in\mathbb{N}$, $A_i=\bigcup_{k=1}^{m_i}I_{(i,k)}$. Entonces:

$$\bigcup_{j=1}^{m}I^{(j)}=A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{m_i}I_{(i,k)}$$

Tenemos dos colecciones de intervalos, por un lado la familia $\left\{I_{(i,k)} : i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$ y por el otro la familia $\left\{I^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}\right\}$. Tanto los intervalos de la primera familia como los de la segunda son ajenos por parejas y A es igual tanto a la unión de los intervalos de la primera familia como de la segunda. Por otra parte, una pareja de intervalos, uno de la primera familia y otro de la segunda, podrían no ser ajenos.

La idea ahora es partir cada intervalo $I^{(j)}$ en intervalos ajenos por parejas, utilizando los intervalos $I_{(i,k)}$. Para esto, definamos, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$:

$$I_{(i,k)}^{(j)} = I_{(i,k)} \cap I^{(j)}$$

Entonces, los intervalos de la familia

$$\left\{I_{(i,k)}^{(j)} : j \in \{1, \ldots, m\}, i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, m_i\}\right\}$$

son ajenos por parejas y:

$I_{(i,k)} = \bigcup_{j=1}^{m} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualesquiera $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \{1, \ldots, m_i\}$.

$I^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} I_{(i,k)}^{(j)}$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Además, por el teorema 2, se tiene:

$\mu_0\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_0\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Así que:

$\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I^{(j)}\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_0\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(I_{(i,k)}^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu_0\left(I_{(i,k)}\right)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$

Además, como μ_0 es finitamente aditiva y $A \supset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu_0(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\mu_0(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$$

Por lo tanto, $\mu_0(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$, así que μ_F es σ-aditiva y, por lo tanto, σ-subaditiva.

$\blacksquare$

Extensión de μ_0 a una medida definida sobre una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Para extender μ_0, primero se define, para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$ lo que se conoce como la medida exterior de A, la cual denotaremos por $\mu_e(A)$.

En general, la medida exterior, definida sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, no es una medida; es decir, no es σ-aditiva. Pero, la σ-subaditividad de μ_0 nos permite demostrar que la medida exterior también es σ-subaditiva.

Una vez demostrado que la medida exterior es σ-subaditiva, se define la propiedad que deben tener los subconjuntos de $\mathbb{R}$ para poderles asignar una medida, a los cuales vamos a llamar **conjuntos medibles**.

Después de eso se demuestran los resultados que finalmente muestran que lo que obtenemos es una medida μ, definida sobre una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, la cual es una extensión de μ_0.

Esos resultados son los siguientes, donde todos los conjuntos con los que se trabaja son subconjuntos de $\mathbb{R}$:

1. Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ entonces $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)$.

2. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mu_e(A) = \mu_0(A)$.

3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos, entonces:

$$\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(A_n)$$

4. La familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

5. La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función finitamente aditiva.

6. La familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

7. La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función σ-aditiva.

8. Todo conjunto de medida exterior cero es medible.

9. Todo elemento de $\mathcal{A}$ es medible.

A continuación demostramos esos 9 resultados.

Definición 9. *Diremos que una colección finita o infinita numerable* $A_1, A_2, \ldots$ *de elementos de* $\mathcal{A}$ *es una cubierta del conjunto* A *si* $A \subset \bigcup_n A_n$.

Definición 10. *Se define la medida exterior,* $\mu_e(A)$*, de un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}$*, mediante la relación*

$$\mu_e(A) = \text{ínf}\left\{\sum_j \mu_0(A_j) : A_1, A_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\}$$

Definición 11. *Diremos que un conjunto* E *es medible si* $\mu_e(A) = \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$ *para cualquier conjunto* A*. Además, en este caso, se define la medida de* E*,* $\mu(E)$*, como la medida exterior de* E*.*

Es inmediato que si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$, entonces $\mu_e(A) \leq \mu_e(B)$.

Proposición 2. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $\mu_e(A) = \mu_0(A)$*.*

Demostración

Sea $A \in \mathcal{A}$ y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces $A_n \cap A \in \mathcal{A}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_n (A_n \cap A)$; así que, como μ_0 es σ-subaditiva:

$$\mu_0(A) \leq \sum_n \mu_0(A_n \cap A) \leq \sum_n \mu_0(A_n)$$

Por lo tanto, como esto ocurre para cualquier cubierta de A, $\mu_0(A) \leq \mu_e(A)$.

Por otra parte, como A es una cubierta de él mismo, se tiene $\mu_e(A) \leq \mu_0(A)$.

■

Proposición 3. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de conjuntos, entonces:*

$$\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(A_n)$$

Demostración

Si $\mu_e(A_n) = \infty$ para alguna n el resultado es trivial.

Supongamos entonces que $\mu_e(A_n) < \infty$ para toda n. Dada $\varepsilon > 0$, para cada conjunto A_n sea $A_{n1}, A_{n2}, \ldots$ una cubierta de A_n tal que:

$$\sum_m \mu_0(A_{nm}) < \mu_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

La familia de conjuntos A_{nm} forman una cubierta de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, así que:

$$\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_m \mu_0(A_{nm}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu_e(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_e(A_n)+\varepsilon$$

Es decir, $\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_e(A_n)+\varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto:

$$\mu_e\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu_e(A_n)$$

∎

Obsérvese que, por la σ-subaditividad de la medida exterior, demostrada en la proposición anterior, se tiene:

$$\mu_e(A) \leq \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c)$$

para cualquier par de conjuntos E y A, de manera que para demostrar la medibilidad de un conjunto E únicamente es necesario probar la otra desigualdad.

Proposición 4. *La familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$.*

Demostración

Que $\mathbb{R}$ es medible, así como que el complemento de un conjunto medible es medible, son resultados obvios.

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles y A cualquier conjunto. Se tiene entonces:

$\mu_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + \mu_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right)$

$= \mu_e\left((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right) + \mu_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$\leq \mu_e(A \cap E_1) + \mu_e(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$= \mu_e(A \cap E_1) + \mu_e(A \cap E_1^c) = \mu_e(A)$

Así que, $E_1 \cup E_2$ es medible.

∎

Proposición 5. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función finitamente aditiva.*

Demostración

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles ajenos, entonces, como $E_1 \cup E_2$ es medible, se tiene:

$$\mu\left(E_1 \cup E_2)\right) = \mu\left((E_1 \cup E_2)) \cap E_1\right) + \mu\left((E_1 \cup E_2) \cap E_1^c\right) = \mu\left(E_1\right) + \mu\left(E_2\right)$$

∎

Proposición 6. *La familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas y A cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$.

Demostremos que $\mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ la igualdad es obvia.

Supongamos ahora que la igualdad es válida para $n = k$, entonces, como E_{k+1} es medible, se tiene:

$\mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j)\right) = \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}^c\right)$

$= \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)\right) = \mu_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} \mu_e(A \cap E_j)$

$= \sum_{j=1}^{k+1} \mu_e(A \cap E_j)$

Por lo tanto, la igualdad es válida para $n = k + 1$, así que, por el principio de inducción, lo es para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como la familia de conjuntos medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ es medible, así que:

$\mu_e(A) = \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$

$\geq \sum_{j=1}^{n} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ y utilizando la σ-subaditividad de la medida exterior,se obtiene entonces:

$\mu_e(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_e(A \cap E_j) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

$\geq \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)\right) + \mu_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

Por lo tanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es medible.

$\blacksquare$

Proposición 7. *La función que asigna a cada conjunto medible E su medida, $\mu(E)$, es una función σ-aditiva.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos medibles ajenos por parejas. Por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

Por otra parte, por la aditividad finita de la función que asigna a cada conjunto medible su medida, se tiene, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$$

Así que tomando límite cuando $n \to \infty$, se tiene:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

■

Si denotamos por $\mathcal{M}$ a la familia de los conjuntos medibles, sabemos ya que $\mathcal{M}$ forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Además, la función $\mu : \mathcal{M} \mapsto \overline{R}$ es no negativa, σ-aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$. Así que μ es una medida definida sobre una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Lo que resta probar es que μ es una extensión de μ_0. Vamos a demostrar que efectivamente esto es así.

Proposición 8. *Todo conjunto de medida exterior cero es medible.*

Demostración

Sea E un conjunto de medida exterior cero y A cualquier conjunto, entonces $A \cap E$ tiene medida exterior cero, así que:

$$\mu_e(A) \geq \mu_e(A \cap E^c) = \mu_e(A \cap E^c) + \mu_e(A \cap E)$$

■

Proposición 9. *Todo elemento de $\mathcal{A}$ es medible.*

Demostración

Sea $E \in \mathcal{A}$, A cualquier conjunto y $A_1, A_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces, para cada A_n, los conjuntos $A_n \cap E$ y $A_n \cap E^c$ pertenecen a $\mathcal{A}$ y se tiene:

$\mu_e(A \cap E) \leq \mu_e\left(\left(\bigcup_n A_n\right) \cap E\right) = \mu_e\left(\bigcup_n (A_n \cap E)\right)$

$\leq \sum_n \mu_e(A_n \cap E) = \sum_n \mu_0(A_n \cap E)$

$\mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e\left(\left(\bigcup_n A_n\right) \cap E^c\right) = \mu_e\left(\bigcup_n (A_n \cap E^c)\right)$

$\leq \sum_n \mu_e(A_n \cap E^c) = \sum_n \mu_0(A_n \cap E^c)$

Así que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \sum_n \mu_0(A_n \cap E) + \sum_n \mu_0(A_n \cap E^c) = \sum_n \mu_0(A_n)$$

Finalmente, como lo anterior es válido para cualquier cubierta de A, se puede concluir que:

$$\mu_e(A \cap E) + \mu_e(A \cap E^c) \leq \mu_e(A)$$

■

Como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y todo elemento de $\mathcal{A}$, así como todo conjunto de medida exterior cero, pertenece a $\mathcal{M}$, podemos concluir que $\mathcal{M}$ contiene a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida exterior cero.

Por otra parte, como $\mu(\mathbb{R}) = \mu_0(\mathbb{R}) = 1$, μ es una medida de probabilidad.

Si nos ubicamos en el contexto de la teoría de la probabilidad, dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y una variable aleatoria real $X : \Omega \to \mathbb{R}$, se tiene definida la función de distribución de X, $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

Esta función F_X es no decreciente y continua por la derecha; además, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Así que, partiendo de F_X, podemos definir una medida de probabilidad μ_X, definida sobre una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, la cual contiene a todos los intervalos y que satisface la igualdad:

$$\mu_X((-\infty, x]) = P[X \in (-\infty, x]]$$

Esta relación se puede generalizar, asegurando que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que pertenece a la σ-álgebra generada por los intervalos, entonces:

$$\mu_X(A) = P[X \in A]$$

En otras palabras, μ_X nos da la distribución de la variable aleatoria X.

Así que, a cualquier variable aleatoria real X podemos asociarle una medida de probabilidad μ_X, definida sobre la σ-álgebra generada por los intervalos, la cual representa la distribución de X.